



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

全品

高考复习方案

主编：肖德好

听课手册
数学
RJA



AI智慧教辅



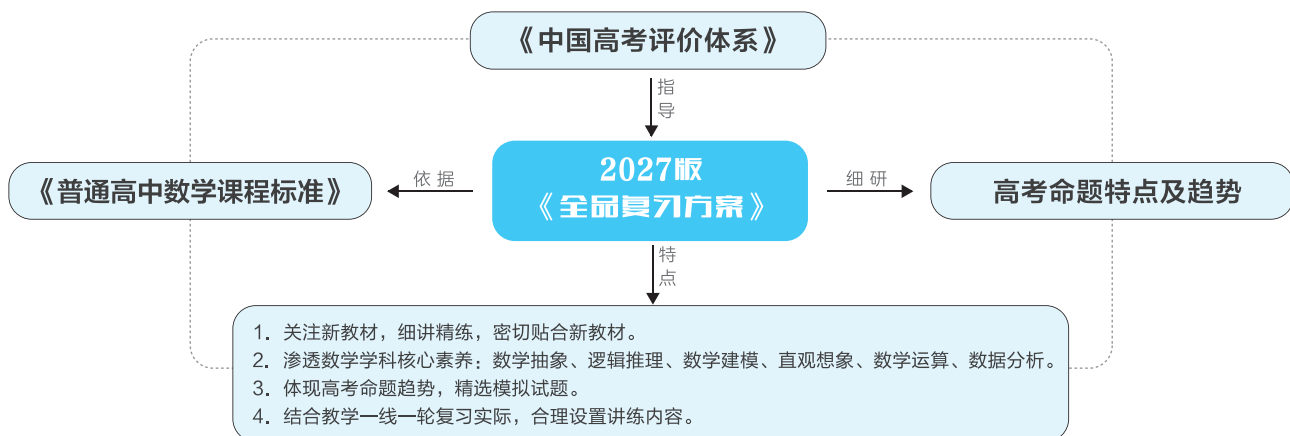
AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

沈阳出版发行集团

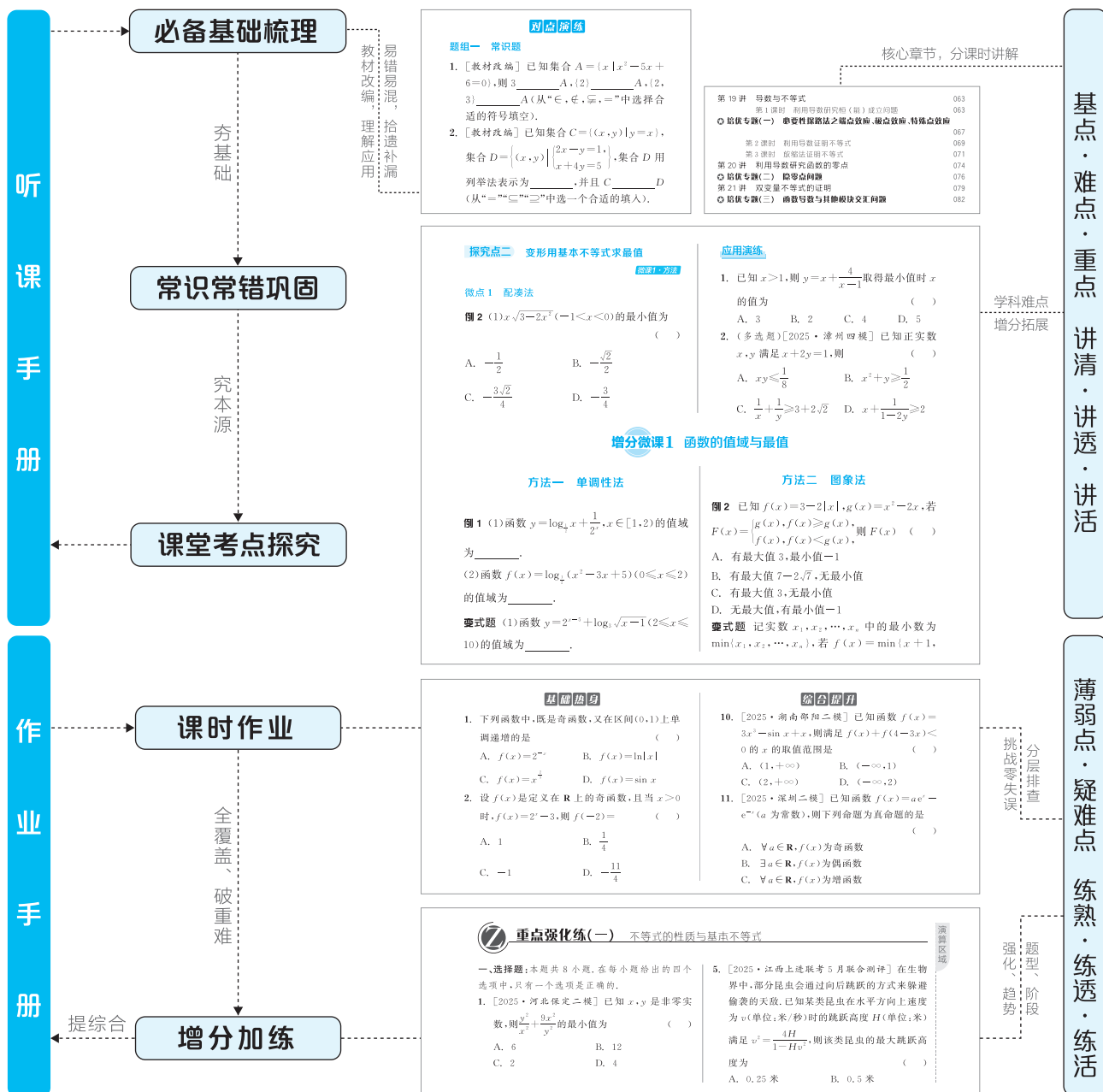
 沈阳出版社

全品高考复习方案

数学



▼ 图书结构与特点



CONTENTS

目录



扫码添加全品伴学者
获取学习服务

01 第一单元 预备知识

第1讲	集合	001
第2讲	常用逻辑用语	004
第3讲	等式与不等式	006
第4讲	基本不等式	008
	教材拓展1 三元基本不等式、柯西不等式	011
第5讲	一元二次函数、方程和不等式	012
	第1课时 二次函数及其性质	012
	第2课时 一元二次方程、不等式	014

02 第二单元 函数

第6讲	函数的概念及其表示	017
第7讲	函数的单调性	020
★ 增分微课1	函数的值域与最值	023
第8讲	函数的奇偶性、对称性	024
第9讲	函数的四性质的应用	028
★ 增分微课2	破解抽象函数的方法	030
第10讲	幂函数、对勾函数与一次分式函数	031
第11讲	指数与指数函数	035
第12讲	对数与对数函数	038
第13讲	函数的图象	041
第14讲	函数与方程	044
第15讲	函数模型及其应用	047

03 第三单元 一元函数的导数及其应用

第16讲	导数的概念及其意义、导数的运算	051
第17讲	导数与函数的单调性	054
第18讲	导数与函数的极值、最值	057
★ 增分微课3	利用切线解决最值范围问题	060
★ 增分微课4	构造法在解决函数、导数问题中的应用	061
第19讲	导数与不等式	063
	第1课时 利用导数研究恒(能)成立问题	063
★ 培优专题(一)	必要性探路法之端点效应、极点效应、特殊点效应	067
	第2课时 利用导数证明不等式	069
	第3课时 放缩法证明不等式	071
第20讲	利用导数研究函数的零点	074
★ 培优专题(二)	隐零点问题	076
第21讲	双变量不等式的证明	079
★ 培优专题(三)	函数导数与其他模块交汇问题	082

04 第四单元 三角函数、解三角形

第22讲	任意角和弧度制、三角函数的概念	083
第23讲	同角三角函数的基本关系式与诱导公式	086

增分微课

增分微课1	函数的值域与最值	023
方法一	单调性法	
方法二	图象法	
方法三	换元法	
方法四	分离常数法	
方法五	判别式法	
方法六	几何法	
方法七	导数法	
增分微课2	破解抽象函数的方法	030
类型一	抽象函数求值	
类型二	抽象函数的性质	
类型三	抽象函数迭代	
增分微课3	利用切线解决最值范围问题	060
类型一	两曲线上点的距离	
类型二	零点(交点)求参	
增分微课4	构造法在解决函数、导数问题中的应用	061
类型一	逆用导函数思维	
类型二	具体函数构造	
类型三	同构	
增分微课5	三角函数中的参数范围问题	103
类型一	三角函数的单调性与 ω, φ 的关系	
类型二	三角函数图象的对称性与 ω, φ 的关系	
类型三	三角函数的最值与 ω, φ 的关系	
类型四	三角函数的零点与 ω, φ 的关系	
增分微课6	与球有关的切、接问题	169
类型一	外接球	
类型二	内切球	
类型三	棱切球	
类型四	组合体切接问题	
类型五	含动点切接问题(最值问题)	

第 24 讲	和、差、倍角的正弦、余弦和正切公式	088
第 25 讲	简单的三角恒等变换	091
	教材拓展 2 和差化积与积化和差	094
第 26 讲	三角函数的图象与性质	095
第 27 讲	函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及三角函数模型的应用	099
★ 增分微课 5	三角函数中的参数范围问题	103
第 28 讲	余弦定理、正弦定理	104
第 29 讲	多三角形背景下解三角形	107
★ 培优专题(四)	解三角形中多变量消元策略	109
第 30 讲	余弦定理、正弦定理应用举例	111

05

第五单元 平面向量与复数

第 31 讲	平面向量的概念及其线性运算	114
第 32 讲	平面向量基本定理及坐标表示	117
	教材拓展 3 等和线求最值范围问题	120
第 33 讲	平面向量的数量积	121
	教材拓展 4 极化恒等式	124
第 34 讲	平面向量的综合问题	125
第 35 讲	复数	128

06

第六单元 数列

第 36 讲	数列的概念与简单表示法	131
第 37 讲	等差数列及其前 n 项和	134
第 38 讲	等比数列及其前 n 项和	138
第 39 讲	数列求和	141
第 40 讲	数列的综合问题	146
★ 培优专题(五)	数列与其他知识交汇融合问题	149

07

第七单元 立体几何

第 41 讲	空间几何体	152
第 42 讲	空间点、直线、平面之间的位置关系	155
第 43 讲	直线、平面平行的判定与性质	158
第 44 讲	直线、平面垂直的判定与性质	163
	教材拓展 5 三垂线定理及逆定理的应用	168
★ 增分微课 6	与球有关的切、接问题	169
第 45 讲	空间向量及其运算和空间位置关系	172
第 46 讲	空间角	176
第 47 讲	空间距离及立体几何中的探索性问题	180
★ 增分微课 7	立体几何中的截面、交线问题	183
★ 增分微课 8	空间中的动态问题	185
★ 培优专题(六)	立体几何中的融合、交汇问题	187

08

第八单元 解析几何

第 48 讲	直线的倾斜角与斜率、直线的方程	191
第 49 讲	两直线的位置关系	194
第 50 讲	圆的方程	197
第 51 讲	直线与圆、圆与圆的位置关系	200

增分微课 7 立体几何中的截面、交线问题 183

- 类型一 作截面
- 类型二 截面图形的形状判断
- 类型三 截面图形的周长或面积
- 类型四 截面有关的体积问题

增分微课 8 空间中的动态问题 185

- 类型一 动点轨迹问题
- 类型二 翻折问题
- 类型三 最值、范围问题

增分微课 9 与圆有关的圆锥曲线问题 229

- 类型一 圆锥曲线内切圆
- 类型二 四点共圆问题
- 类型三 隐圆问题
- 类型四 动圆过定点

增分微课 10 利用数列递推关系解决概率问题 273

- 类型一 一阶递推数列 $P_n=aP_{n-1}+b(n\geqslant 2)$
- 类型二 二阶递推数列
- 类型三 $a_{n+1}=a_nf(n)$ 型

培优专题

培优专题(一) 必要性探路法之端点效应、极点效应、特殊点效应 067

- 类型一 端点效应
- 类型二 极点效应
- 类型三 特殊点效应

培优专题(二) 隐零点问题 076

- 类型一 等量代换
- 类型二 数值估计
- 类型三 常量变量化

培优专题(三) 函数导数与其他模块交汇问题 082

- 类型一 函数导数融合问题
- 类型二 导数与数列融合问题
- 类型三 导数与三角融合问题

培优专题(四) 解三角形中多变量消元策略 109

- 策略一 角度消元
- 策略二 边长消元
- 策略三 混合消元

第 52 讲	椭圆	203
第 53 讲	双曲线	207
第 54 讲	直线与椭圆、双曲线的位置关系	210
第 55 讲	抛物线	215
第 56 讲	圆锥曲线热点问题	220
第 1 课时	长度、斜率、面积问题	221
第 2 课时	最值与范围、证明问题	224
第 3 课时	定点、定值、探索性问题	226
◆ 增分微课 9	与圆有关的圆锥曲线问题	229
◆ 培优专题(七)	解析几何运算优化策略	232
◆ 培优专题(八)	圆锥曲线中的融合、交汇问题	234

09

第九单元 统计

第 57 讲	随机抽样	237
第 58 讲	用样本估计总体	240
第 59 讲	成对数据的统计分析	246

10

第十单元 计数原理、概率、随机变量及其分布

第 60 讲	分类加法计数原理与分步乘法计数原理	254
第 61 讲	排列与组合	256
第 62 讲	二项式定理	259
第 63 讲	随机事件与概率、古典概型	262
第 64 讲	随机事件的相互独立性与条件概率	267
第 65 讲	全概率公式及应用	270
◆ 增分微课 10	利用数列递推关系解决概率问题	273
第 66 讲	离散型随机变量的分布列、数字特征	276
教材拓展 6	随机变量之和的数学期望	280
第 67 讲	二项分布与超几何分布、正态分布	282
◆ 培优专题(九)	概率与其他知识的交汇问题	287

培优专题(五) 数列与其他知识交汇融合问题

149

- 类型一 数列与集合的交汇问题
- 类型二 数列与函数、导数的交汇问题
- 类型三 数列与解析几何的交汇问题

培优专题(六) 立体几何中的融合、交汇问题

187

- 类型一 几何体与球的交汇问题
- 类型二 立体几何与解析几何的交汇问题
- 类型三 立体几何与新定义相融合

培优专题(七) 解析几何运算优化策略

232

- 策略一 设点设线选择
- 策略二 利用几何条件代数化
- 策略三 齐次化

培优专题(八) 圆锥曲线中的融合、交汇问题

234

- 类型一 圆锥曲线与立体几何交汇问题
- 类型二 圆锥曲线与数列交汇问题
- 类型三 圆锥曲线与函数、导数交汇问题

培优专题(九) 概率与其他知识的交汇问题

287

- 类型一 统计图表与概率
- 类型二 统计案例与概率
- 类型三 概率与函数、导数

作业手册+增分加练 [正反倒装 单独成册 P331~P552]

参考答案(听课手册) [单独成册 P292~P330] 参考答案(作业手册+增分加练) [单独成册 P554~P632]

增分加练

重点强化练(一)	不等式的性质与基本不等式	515	重点强化练(十)	数列递推与数列求和	533
重点强化练(二)	函数图象与性质	517	重点强化练(十一)	空间中的平行与垂直	535
重点强化练(三)	函数零点问题	519	重点强化练(十二)	空间中的截面问题、折叠与展开问题	537
重点强化练(四)	利用导数研究函数的图象和性质	521	重点强化练(十三)	隐圆问题	539
重点强化练(五)	导数的综合应用	523	重点强化练(十四)	焦点三角形与离心率	541
重点强化练(六)	三角恒等变换	525	重点强化练(十五)	焦点弦	543
重点强化练(七)	三角函数的图象与性质	527	重点强化练(十六)	直线与圆锥曲线、圆与圆锥曲线	545
重点强化练(八)	解三角形	529	重点强化练(十七)	随机变量及其分布	548
重点强化练(九)	等差数列与等比数列	531	重点强化练(十八)	概率分布中的决策类问题	551



第 1 讲 集合

- 【课标要求】
- 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
 - 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
 - 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
 - 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
 - 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
 - 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
 - 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

- (1) 集合中元素的性质: _____、
_____,无序性.
- (2) 集合与元素的关系: ① 属于,记为
_____ ; ② 不属于,记为 _____.
- (3) 集合的表示方法: 列举法、_____,
_____和区间法.
- (4) 常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号					

2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合 A 中 _____ 都是集合 B 中的元素	$x \in A \Rightarrow x \in B$	$A \subseteq B$ 或 _____
真子集	集合 A 是集合 B 的子集, 并且 B 中 _____ 有一个元素不属于 A	① $A \subseteq B$; ② $\exists x \in B, x \notin A$	$A \subset B$ 或 $B \supset A$
相等	集合 A, B 中的元素完全 _____	$A \subseteq B, B \subseteq A$	_____
空集	_____ 任何元素的集合, 空集是任何集合的子集	① $\forall x, x \notin \emptyset$; ② $\emptyset \subseteq A$	$\emptyset$

3. 集合的基本运算

表示运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于 A _____ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x x \in A, x \in B\}$		_____
并集	由所有属于 A _____ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x x \in A, x \in B\}$		_____
补集	全集 U 中 _____ 属于 A 的所有元素组成的集合	$\{x x \in U, x \notin A\}$		_____

4. 集合的运算性质

- (1) 交集的运算性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.
- (2) 并集的运算性质: $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow B \subseteq A$.
- (3) 补集的运算性质: $A \cup (\complement_U A) = U$; $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\complement_U (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; $\complement_U (A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}} \cup \underline{\hspace{2cm}}$.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数: 集合 A 中有 n 个元素, 则集合 A 有 2^n 个子集, $2^n - 1$ 个真子集, $2^n - 1$ 个非空子集, $2^n - 2$ 个非空真子集.
2. 子集的传递性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (真子集也满足).
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow (\complement_U A) \supseteq (\complement_U B)$.
4. 集合元素个数: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ (常用在实际问题中).

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 则 3 A , $\{2\}$ A , $\{2, 3\}$ A (从“ $\in, \notin, \subseteq, =$ ”中选择合适的符号填空).
2. [教材改编] 已知集合 $C = \{(x, y) \mid y = x\}$, 集合 $D = \{(x, y) \mid \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 4y = 5 \end{cases}\}$, 集合 D 用列举法表示为 , 并且 C D (从“ $=$ ”“ $\subseteq$ ”“ $\supseteq$ ”中选一个合适的填入).

3. [教材改编] 已知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$, 则 $A \cap B =$, $A \cup B =$, $A \cap (\complement_U B) =$.

题组二 常错题

- ◆索引: 忽视集合中元素的性质致错; 对集合的表示方法理解不到位致错; 忽视集合运算中端点取值致错; 忘记空集的情况致错.
4. 已知集合 $A = \{1, |a - 1|, a + 2\}$, 且 $2 \in A$, 则实数 a 的值为 .
 5. 已知集合 $A = \{x \mid y = \ln(x - 1)\}, B = \{y \mid y = x^2 - 4x, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$.
 6. 已知集合 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x \mid \frac{1}{9} < 3^x < 1\}$, 则 $A \cap B =$.
 7. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid (x - 2)(x - 3) \leq 0\}, B = \{x \mid ax - 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 a 的取值构成的集合为 .

课堂考点探究

探究点一 集合的概念

- 例 1** (1) [2025 · 陕西汉中质检] 已知集合 $A = \{x \mid x = 2m + \sqrt{3}n, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$, 则 ()
- A. $\sqrt{3} \notin A$ B. $-2 + 5\sqrt{3} \notin A$
- C. $4 \in A$ D. $-1 + 2\sqrt{3} \in A$
- (2) 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则集合 B 中的元素个数为 .

◆◆ 总结反思

解决集合概念问题的关键有三点: 一是确定构成集合的元素是什么; 二是看这些元素的限制条件是什么; 三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题. 特别提醒: 含参数的集合问题, 在求出参数的值后, 需要验证集合中的元素是否满足互异性.

- 变式题** (1) [2025 · 湖南长沙长郡中学保温卷] 已知集合 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$, 则 $C = \{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$ 中的元素个数为 ()

- (2) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a + b, 0\}$, 则 $a^{2026} + b^{2026} =$.

探究点二 集合间的基本关系

- 例 2** (1) [2023 · 新课标II卷] 设集合 $A = \{0, -a\}, B = \{1, a - 2, 2a - 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
- A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
- (2) 已知集合 $A = \{1, 3\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 .

◆◆ 总结反思

- (1) 一般利用数轴法、Venn 图法以及结构法判断两个集合的关系, 对于含有参数的集合, 需要对式子进行变形, 有时需要进一步对参数进行分类讨论.
- (2) 确定非空集合 A 的子集的个数, 需先确定集合 A 中元素的个数. 特别提醒: 不能忽略任何非空集合是它自身的子集, 空集是任何非空集合的真子集.
- (3) 根据集合的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1) 已知集合 $A = \{x \mid x = \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{x \mid x = \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()

- A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$
C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$

(2) [2025 · 安徽安庆二模] 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x < a + 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 2]$
C. $[1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

探究点三 集合的基本运算

► 角度 1 集合的运算

例 3 (1) [2024 · 新课标 I 卷] 已知集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$
C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

(2) [2023 · 全国乙卷] 设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 则 $\{x \mid x \geq 2\} =$ ()

- A. $\complement_U(M \cup N)$ B. $N \cup (\complement_U M)$
C. $\complement_U(M \cap N)$ D. $M \cup (\complement_U N)$

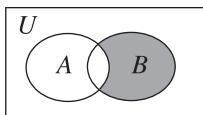
◆◆ 总结反思

对于已知集合的运算, 可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解, 必要时可结合数轴以及 Venn 图求解.

变式题 (1) (多选题) 已知集合 $M = \{x \mid 5^x \geq 25\}$, $N = \{x \mid y = \ln(2x - 6)\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $M \cap N = M$
B. $M \cup N = M$
C. $(\complement_{\mathbf{R}} N) \cap M = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$
D. $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap N = \emptyset$

(2) 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{0, 2, 4, 5\}$, 则图中的阴影部分表示的集合为 _____.



► 角度 2 利用集合的运算求参

例 4 [2025 · 福建漳州二检] 已知集合 $A = \{x \mid \log_2 x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 + a < x < 2a - 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$
B. $(-\infty, \frac{1}{2}]$
C. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$
D. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, +\infty)$

◆◆ 总结反思

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1) 与不等式有关的集合, 一般利用数轴解决, 要注意端点值能否取到.

(2) 若集合中的元素能一一列举, 则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系, 再列方程(组)求解.

变式题 已知集合 $M = \{x \mid -4 < x < a\}$, $N = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 且 $M \cup N = \{x \mid -4 < x < 3\}$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[1, 3]$ B. $(1, 3)$
C. $[1, 3)$ D. $(1, 3]$

► 角度 3 集合语言的运用

例 5 集合 $M = \{x \mid m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$, $N = \{x \mid n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 若把 $b - a$ 叫作集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 的长度, 那么集合 $M \cap N$ 的长度的最小值为 _____.

◆◆ 总结反思

以集合语言为背景的新定义问题, 需正确理解新定义(即分析新定义的特点, 把新定义所叙述的问题的本质弄清楚), 转化成熟知的数学情境, 并能够应用到具体的解题过程中, 这是破解新定义集合问题的关键.

变式题 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 _____.

第2讲 常用逻辑用语

- 【课标要求】
1. 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义,理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
 2. 理解全称量词与存在量词的意义,能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定,能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的 _____ 条件, q 是 p 的 _____ 条件	
p 是 q 的 _____ 条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

- (1) 短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作 _____, 用符号“_____”表示.
- (2) 短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作 _____, 用符号“_____”表示.
- (3) 含有一个量词的命题的否定:
全称量词命题: $\forall x \in M, p(x)$, 它的否定是 _____.
存在量词命题: $\exists x \in M, p(x)$, 它的否定是 _____.

3. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于($\neq$)	不大于($\leq$)	不小于($\geq$)	不是

正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] “三角形是等边三角形”是“三角形是等腰三角形”的 _____ 条件.
(在“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选一个填入)

2. [教材改编] 命题“ $\exists x \in \mathbf{Q}, |x| \in \mathbf{N}$ ”是 _____ 量词命题(填“全称”或“存在”), 并且是 _____ 命题(填“真”或“假”), 它的否定是 _____.
3. [教材改编] 已知 $\triangle ABC$ 的三边的长分别为 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$, 那么“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的 _____ 条件.
(在“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选一个填入)
4. [教材改编] 已知“ $\forall x > 1, 2x + 1 > \lambda$ ”是假命题, 则实数 λ 的取值范围是 _____.

题组二 常错题

- ◆ 索引: 充分、必要条件的推理考虑不全面; 全称量词命题的否定出错; 对充分、必要条件判断错误.
5. 已知 $A = (-\infty, a], B = (-\infty, 3]$.
 - ① 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 _____;
 - ② 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 _____;
 - ③ 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分必要条件, 则实数 a 的值为 _____.
 6. 命题“所有能被 3 整除的整数都是奇数”的否定是 _____.
 7. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 那么 p 是 q 的 _____ 条件.(在“充分不必要”“必要不充分”和“充要”中选填一个)

探究点一 充分条件与必要条件的判断

例 1 (1)[2025·天津卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x=0$ ”是“ $\sin 2x=0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(2)[2025·深圳二模] 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 则“ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ”是“四边形 $ABCD$ 是正方形”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的两种判定方法

- (1) 定义法: 适用于定义、定理的判断问题;
- (2) 集合法: 多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

变式题 (1)[2025·人大附中月考] 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A \cos B < \sin A \sin B$ ”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(2) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x > y$ ”的一个充分不必要条件可以是 ()

- A. $|x| > |y|$
- B. $x^2 > y^2$
- C. $\frac{x}{y} > 1$
- D. $2^{x-y} > 2$

探究点二 充分条件与必要条件的应用

例 2 [2025·福建泉州一模] 设 $A = \{x | 1 \leq 2^x \leq 4\}$, $B = \{x | x^2 \leq ax\}$, 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分条件, 则 ()

- A. $0 < a < 2$
- B. $1 < a < 2$
- C. $a = 2$
- D. $a \geq 2$

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上, 解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系, 然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解. 解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 已知 $p: -2 \leq x \leq 10$, $q: 1-m \leq x \leq 1+m$ ($m > 0$).

- (1) 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 _____;
- (2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 m 的取值范围为 _____.

探究点三 全称量词与存在量词

► 角度 1 含量词命题的否定及真假判断

例 3 (1) 命题“ $\exists a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 是奇函数”的否定是 ()

- A. $\forall a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 是偶函数
- B. $\forall a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 不是奇函数
- C. $\exists a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 是偶函数
- D. $\exists a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2$ 不是奇函数

(2) [2024·新课标 II 卷] 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()

- A. p 和 q 都是真命题
- B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
- C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
- D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

◆◆ 总结反思

(1) 全称量词命题与存在量词命题的否定:

- ① 改写量词: 确定命题所含量词的类型, 省去量词的要结合命题的含义加上量词, 再对量词进行改写;
- ② 否定结论: 对原命题的结论进行否定.

(2) 全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法:

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假
	假	所有对象使命题为假	否定为真

变式题 (多选题)下列命题的否定中,是全称量词命题且为真命题的有 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$
 B. 所有的正方形都是矩形
 C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$
 D. 至少有一个实数 x , 使 $x^3 + 1 = 0$

》角度2 含量词命题的应用

例4 (1)若“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + (a+1)x + 1 < 0$ ”为真命题,则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
 B. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
 C. $[-3, 1]$
 D. $(-3, 1)$

(2)已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 若“ $\exists x \in [2, +\infty), \forall a \in [-1, 1],$ 使得 $f(x) < m + a$ ”是真命题,则实数 m 的取值范围为_____.

◆◆ 总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤:

- (1)根据题目条件,推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况);
 (2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围;
 (3)根据每个命题的真假情况,求出参数的取值范围.

变式题 [2025·西南名校联盟联考] 已知“ $\exists x \in (0, +\infty), 2x^2 - ax + 1 < 0$ ”为假命题,则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ B. $(-\infty, 2]$
 C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, \frac{1}{2}]$

第3讲 等式与不等式

【课标要求】 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

$$(1) \text{作差法} \begin{cases} a - b > 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a - b = 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a - b < 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b. \end{cases}$$

(2)作商法

$$\begin{cases} \frac{a}{b} > 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0), \\ \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b (a, b \neq 0), \\ \frac{a}{b} < 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0). \end{cases}$$

2. 等式的性质

- (1)如果 $a = b, b = c$, 那么 $a = c$.
 (2)如果 $a = b$, 那么 $a + c$ _____ $b + c$,
 $a - c$ _____ $b - c$.
 (3)如果 $a = b$, 那么 ac _____ bc ,
 $\frac{a}{c}$ _____ $\frac{b}{c}$ ($c \neq 0$).

3. 不等式的性质

- (1)对称性: $a > b \Leftrightarrow$ _____ (双向性).
 (2)传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (单向性).
 (3)可加性: $a > b \Leftrightarrow a + c$ _____ $b + c$ (双向性).
 (4)可乘性: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac$ _____ bc ;
 $a > b, c < 0 \Rightarrow ac$ _____ bc .
 (5) $a > b, c > d \Rightarrow$ _____ (单向性).
 (6) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac$ _____ bd (单向性).
 (7)乘方法则: $a > b > 0 \Rightarrow a^n$ _____ b^n ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$) (单向性).

◆◆ 常用结论

1. 若 $ab > 0$, 且 $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
 2. 若 $a < x < b, c < y < d$, 则 $a - d < x - y < b - c$.
 3. 若 $\frac{a}{b} < 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} < 1$;
 若 $\frac{a}{b} > 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m} > 1$.

题组一 常识题

1. [教材改编] 设 $M = x^2 + y^2 + 1$, $N = 2(x + y - 1)$, 则 M 与 N 的大小关系为_____.
2. [教材改编] 已知 $2 < a < 3$, $-2 < b < -1$, 则 $2a + b$ 的取值范围是_____.
3. [教材改编] 下列命题为真命题的是_____(填序号).
 - ① 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$;
 - ② 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$;
 - ③ 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab < b^2$;
 - ④ 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

题组二 常错题

- ◆ 索引: 求取值范围时乱用不等式的加法法则致错; 乘法运算时不注意符号的影响致错; 运用作差法时对差的变形不彻底或变形方向不明确致错.
4. 若 $1 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 1$, 则 $2x - y$ 的取值范围为_____.
 5. 已知实数 $a \in (-3, 1)$, $b \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____.
 6. 已知 a, b, c 为不全相等的实数, $P = a^2 + b^2 + c^2 + 3$, $Q = 2(a + b + c)$, 那么 P 与 Q 的大小关系是_____.

课堂考点探究

探究点一 比较数(式)的大小

例 1 (1)(多选题)下列不等式中正确的是

()

- A. $x^2 - 2x > -3 (x \in \mathbf{R})$
- B. $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 (a, b \in \mathbf{R})$
- C. $a^2 + b^2 > 2(a - b - 1)$
- D. $\frac{a}{b} < \frac{a + 2026}{b + 2026} (b > a > 0)$

(2) 已知 a, b 都是正数, 比较大小: a^ab^b _____ a^bb^a .

◆◆ 总结反思

(1) 判断两个式子大小关系的常用方法: 作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2) 作差(商)法的一般步骤是: 作差(商), 变形, 定号, 得出结论.

变式题 (1) 已知 $a \geq 1$, 则 $M = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ 与 $N = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ 的大小关系是_____.

(2) 若 $a = \frac{\ln 3}{3}$, $b = \frac{\ln 4}{4}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()

- A. $a < b < c$
- B. $c < b < a$
- C. $c < a < b$
- D. $b < a < c$

探究点二 不等式的性质

例 2 (1) 已知 a, b, c, d 均为实数, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a > b, c > d$, 则 $a + b > c + d$
- B. 若 $a^2 > b^2$, 则 $-a < -b$

C. 若 $c > a > b > 0$, 则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

D. 若 $a > b > 0$ 且 $m > 0$, 则 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

(2)(多选题) 若 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 则 ()

- A. $|a| < |b|$
- B. $ac < bc$
- C. $\frac{a-b}{c} > 0$
- D. $0 < \frac{a}{b} < 1$

◆◆ 总结反思

解决不等式有关问题常用的三种方法

(1) 直接利用不等式的性质逐个验证, 利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件.

(2) 利用特殊值法排除错误答案, 需注意取值一定要遵循三个原则: 一是满足题设条件; 二是取值要简单; 三是所取的值要有代表性.

(3) 构造函数, 利用函数的单调性判断.

变式题 (1)[2025·北京房山区一模] 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 则 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $a^2 < b^2$
C. $a^3 < b^3$ D. $\ln(b-a) > 0$

(2)(多选题)[2025·山东临沂二模] 已知 $a > b > c$, 则下列不等式一定正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{a-b}$ B. $ab^2 > cb^2$
C. $a+b > c$ D. $a^2 + c^2 > b^2$

探究点三 不等式性质的综合应用

例 3 (多选题) 已知实数 x, y 满足 $-1 \leq x + y \leq 3, 4 \leq 2x - y \leq 9$, 则 ()

- A. $1 \leq x \leq 4$
B. $-2 \leq y \leq 1$
C. $2 \leq 4x + y \leq 15$
D. $\frac{1}{3} \leq x - y \leq 6$

◆◆ 总结反思

求代数式的取值范围需注意两点:(1)严格运用不等式的性质;(2)利用整体思想,通过“一次性”不等关系的运算求解取值范围,防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

变式题 已知实数 a, b, c 满足 $a > b > c$, 且 $a + b + c = 0$, 那么 $\frac{c}{a}$ 的取值范围是_____.

第 4 讲 基本不等式

【课标要求】 1. 掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b > 0)$.

2. 结合具体实例,能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- (1)基本不等式成立的条件:_____.
(2)等号成立的条件:当且仅当_____时取等号.
(3)数_____称为 a, b 的算术平均数;数 $\sqrt{ab}$ 称为 a, b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

- (1) $a^2 + b^2 \geq$ _____ ($a, b \in \mathbf{R}$).
(2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq$ _____ (a, b 同号).
(3) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$).
(4) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

3. 利用基本不等式求最值问题

- 已知 $x > 0, y > 0$.
(1)如果积 xy 是定值 p , 那么当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 有最小值, 是_____. (简记: 积定和最小)

(2)如果和 $x + y$ 是定值 p , 那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值, 是_____. (简记: 和定积最大)

◆◆ 常用结论

1. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq$

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立. 上述不等式链也简记为调和平均数 $\leq$ 几何平均数 $\leq$ 算术平均数 $\leq$ 平方平均数.

2. 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在 $x = \sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$; 当 $x < 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在 $x = -\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知 $x > 1$, 则 $y = x + \frac{4}{x}$ 的最小值为_____, 当且仅当 $x =$ _____ 时 y 取最小值.

2. [教材改编] 函数 $y=x(3-2x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的最大值是_____.

3. [教材改编] 若函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}$ ($x>2$) 在 $x=a$ 处取得最小值, 则 $a=_____$.

4. [教材改编] 已知一个矩形的周长为 36 cm, 矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 当矩形的长为_____cm, 宽为_____cm 时, 旋转形成的圆柱的侧面积最大, 最大侧面积为_____cm².

题组二 常错题

◆索引: 对于基本不等式的应用, 忽视变量的正负致错; 忽视等号成立的条件致错.

5. 设 $x < 0$, 则 $y=3-3x-\frac{1}{x}$ 的最小值是_____.

6. 当 $x \leq -2$ 时, $x+\frac{4}{x-2}$ 的最大值为_____.

课堂考点探究

探究点一 直接用基本不等式

例 1 (1) [2025 · 北京卷] 已知 $a>0, b>0$, 则 ()

- A. $a^2+b^2>2ab$ B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$
C. $a+b>\sqrt{ab}$ D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$

(2) (多选题) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $4ab \leq (a+b)^2$ B. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
C. $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ D. $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

◆◆ 总结反思

利用基本不等式比较大小, 主要有两个思路: 一是直接建立不等关系比较大小; 二是观察待比较式子的结构特征, 合理选取基本不等式或其变形形式, 结合不等式的性质比较大小.

变式题 (1) (多选题) 在下列函数中, 最小值是 $2\sqrt{2}$ 的是 ()

- A. $y=x^2+\frac{2}{x^2}$ ($x \neq 0$)
B. $y=x+\frac{1}{x}$ ($x>0$)
C. $y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$
D. $y=e^x+\frac{2}{e^x}$

(2) “ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ ” 是 “ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

探究点二 变形用基本不等式求最值

微课1·方法

微点1 配凑法

例 2 (1) $x\sqrt{3-2x^2}$ ($-1 < x < 0$) 的最小值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

(2) 设实数 x 满足 $x>0$, 则函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 ()

- A. $4\sqrt{3}-1$ B. $4\sqrt{3}+2$
C. $4\sqrt{2}+1$ D. 6

◆◆ 总结反思

基本不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能, 利用基本不等式求最值时, 要根据式子的特征灵活变形, 先配凑出积、和为常数的形式, 再利用基本不等式求解.

微点2 常数代换法

例3 (1)[2025·石家庄一模] 已知 $x \in (0, 4)$,

则 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{16}{4-x}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{49}{3}$ B. $\frac{17}{2}$ C. $\frac{19}{3}$ D. $\frac{25}{4}$

(2) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $4x + 2y - xy = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值为 ()

- A. 16 B. $8 + 4\sqrt{2}$
C. 12 D. $6 + 4\sqrt{2}$

◆◆ 总结反思

常数代换法主要解决形如“已知 $x + y = t$ (t 为常数, $t \neq 0$), 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 的最值”的问题, 通常先将 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 转化为 $(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}) \cdot \frac{x+y}{t}$, 再用基本不等式求最值.

微点3 消元法求最值

例4 [2025·湖北襄阳五中适应性考试] 已知实数 x, y 满足 $x > 3$, 且 $xy + 2x - 3y = 12$, 则 $x + y$ 的最小值为 ()

- A. $1 + 2\sqrt{6}$ B. 8
C. $6\sqrt{2}$ D. $1 + 2\sqrt{3}$

◆◆ 总结反思

消元法, 即根据条件建立两个量之间的函数关系, 然后代入代数式转化为函数的最值求解. 有时会出现多元的问题, 解决方法是消元后利用基本不等式求解.

应用演练

1. 已知 $x > 1$, 则 $y = x + \frac{4}{x-1}$ 取得最小值时 x 的值为 ()

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 5

2. (多选题) [2025·漳州四模] 已知正实数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 ()

- A. $xy \leq \frac{1}{8}$ B. $x^2 + y \geq \frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ D. $x + \frac{1}{1-2y} \geq 2$

3. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = ab$, 则 $2a + b$ 的最小值为 _____.

4. 已知 x, y 都是正数, 且满足 $x + 2y + xy = 30$, 则 xy 的最大值为 _____.

探究点三 基本不等式的实际应用

例5 某厂家拟在 2026 年举行促销活动, 经调查测算, 该产品的年销量 (即该厂的年产量) x (单位: 万件) 与年促销费用 t ($t \geq 0$, 单位: 万元) 之间满足 $x = 4 - \frac{k}{2t+1}$ (k 为常数). 若不搞促销活动, 则该产品的年销量只有 1 万件. 已知 2026 年生产该产品的固定投入为 6 万元, 每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元, 该厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍 (产品成本包括固定投入和再投入两部分).

(1) 设该厂家 2026 年该产品的年利润为 y 万元, 求 y 关于 t 的函数关系式.

(2) 该厂家 2026 年该产品的年促销费用为多少万元时该产品的年利润最大?

◆◆ 总结反思

有关函数最值的实际问题的解题技巧

- (1) 根据实际问题建立函数关系式,再利用基本不等式求得函数的最值.
- (2) 设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为因变量.
- (3) 解应用题时,一定要注意变量的实际意义及其取值范围.
- (4) 在应用基本不等式求函数最值时,若等号取不到,则可利用函数的单调性求解.

变式题 [2025·重庆一中期末]

如图所示,利用一堵长 8 m、高 3 m 的旧墙建造一个无盖的长方体仓库. 由于空间限制,仓库的宽度固定为 3 m. 已知仓库三个侧面的建造成本为 900 元/ m^2 ,仓库底面的建造成本为 600 元/ m^2 . 整个仓库的建造成本预算为 32 400 元,假设成本预算恰好用完,则仓库的储物量(即容积)的最大值为 _____ m^3 .



教材拓展 1 三元基本不等式、柯西不等式

1. 三元基本不等式:

如果 a, b, c 均为正数,那么 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立).

推广: n 元基本不等式: 如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为正数,那么 $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ (当且仅当 $a_1=a_2=\dots=a_n$ 时等号成立).

[课本探源: 苏教必修第一册 P71 问题与探究]

2. 柯西不等式:

(1) 柯西不等式的向量形式: 设 α, β 是两个向量,则 $|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$, 当且仅当 β 是零向量,或者存在实数 k ,使得 $\alpha = k\beta$ ($\beta \neq 0$) 时等号成立.

(2) 二维形式的柯西不等式

若 a, b, c, d 都是实数,则 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$, 当且仅当 $ad=bc$ 时,等号成立.

(3) 三维形式的柯西不等式

设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 都是实数,则 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$, 当且仅当 $b_i=0$ ($i=1, 2, 3$) 或存在实数 k ,使得 $a_i=k b_i$ ($b_i \neq 0, i=1, 2, 3$) 时,等号成立.

[课本探源: 人 A 必修第二册 P37 第 16 题]

【典型例题】

例 1 已知 $x > 0$, 则 $y = 6x + \frac{3}{x^2}$ 的最小值是 _____.

例 2 (1) [2025·蚌埠 4 月模拟] 已知 $x > 0, y > 0, x+y=1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值为 _____.

(2) [2025·天津河西区模拟] 已知 $a, b, c > 0$, 且 $a+b+c=1$, 则 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$ 的最大值为 ()

- A. 3 B. $3\sqrt{2}$
C. 18 D. 9

【巩固演练】

- 若 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, b_1^2+b_2^2+b_3^2=4$, 则 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 的最大值为 ()
A. 1 B. 2
C. 3 D. 4
- 对任意的正实数 $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{5y} \leq k\sqrt{x+y}$ 恒成立, 则 k 的最小值为 ()
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$
C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$
- 已知 $x > 0, y > 0, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y$ 的最大值是 _____.
- 函数 $f(x) = \sqrt{x-x^2} + \sqrt{4x-x^2}$ 的最大值为 _____.

第5讲 一元二次函数、方程和不等式

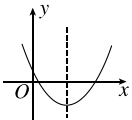
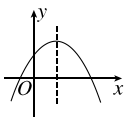
/ 第1课时 二次函数及其性质 /

- 【课标要求】 1. 掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值).
2. 了解二次函数的广泛应用.

课前基础巩固

知识聚焦

二次函数的图象和性质

解析式	$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)	$y=ax^2+bx+c$ ($a<0$)
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	_____	_____
单调性	在_____上 单调递减, 在 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上单 调递增	在_____上 单调递增, 在 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 上 单调递减
顶点 坐标	_____	
奇偶性	当_____时为偶函数	
对称轴 方程	$x = -\frac{b}{2a}$	

常用结论

- 二次函数解析式的三种形式:
 - 一般式: $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$;
 - 顶点式: $f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$;
 - 零点式: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.
- 一元二次函数图象与 x 轴的交点个数
 - 没有交点 $\Leftrightarrow \Delta < 0$;

(2) 有一个交点 $\Leftrightarrow \Delta = 0$;

(3) 有两个不同的交点 $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

3. 二次函数零点的分布问题

设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, 若在区间 $[m, n]$ 上, 有 $f(m)\geq 0, f(n)\leq 0$, 则曲线 $y=f(x)$ 必与 x 轴相交 ($f(x)$ 在 $[m, n]$ 内至少有一个零点).

对点演练

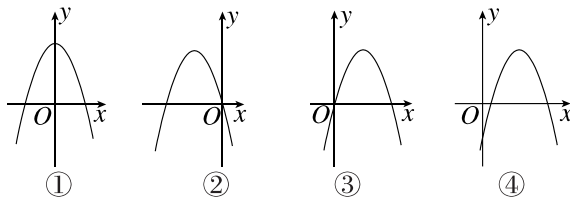
题组一 常识题

- [教材改编] 函数 $y=-3x^2+12x-8$ 的最大值为_____.
- [教材改编] 已知 $f(x)$ 为二次函数, 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最小值 -2 , 且 $f(x)$ 的图象经过原点, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.
- [教材改编] 若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$, $x\in[a, b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $b=_____$.

题组二 常错题

◆ 索引: 对二次函数的图象特征把握不准致误;
二次函数的单调性理解不到位致误.

- 若 $a<0, b>0$, 则函数 $y=ax^2+bx$ 的大致图象是_____. (填序号)



- 若函数 $y=mx^2+x+2$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减, 则 m 的取值范围是_____.

探究点一 二次函数的解析式

例 1 已知二次函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(4, 3)$, $f(x)$ 的图象截 x 轴所得线段的长度为 2, 并且对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2-x) = f(2+x)$, 则 $f(x) =$ _____.

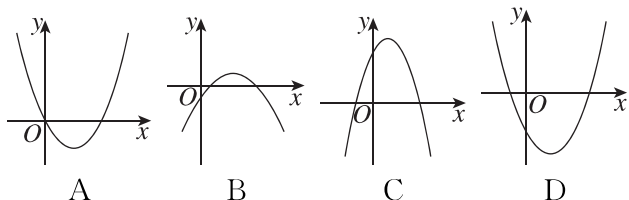
◆◆ 总结反思

求二次函数解析式的三个策略:(1)已知三个点的坐标,宜选用一般式;(2)已知顶点坐标、对称轴、最大(小)值等,宜选用顶点式;(3)已知图象与 x 轴的两交点的坐标,宜选用零点式.

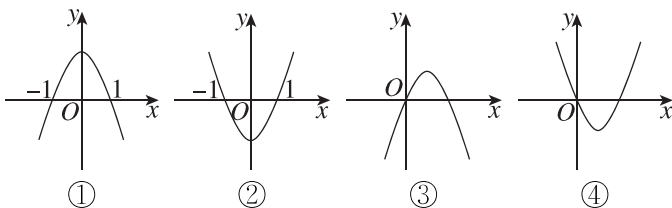
变式题 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = -1$, $f(-1) = -1$, 且 $f(x)$ 的最大值是 8, 则 $f(x) =$ _____.

探究点二 二次函数的图象

例 2 (1) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 $a > b > c, a + b + c = 0$, 则 $f(x)$ 的图象可能是 ()



(2) 设 $b > 0$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + a^2 - 1$ 的图象为下列 4 个图象之一, 则 a 的值为 ()

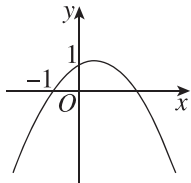


- A. 1
B. -1
C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

◆◆ 总结反思

研究二次函数的图象应从“三点一线一开口”进行分析，“三点”中有一个点是顶点，另两个点是图象上关于对称轴对称的两个点，常取与 x 轴的交点；“一线”是指对称轴这条直线；“一开口”是指抛物线的开口方向.

变式题 (多选题) 如图, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象的顶点在第一象限, 且经过 $A(-1, 0), B(0, 1)$ 两个点, 则下列说法正确的是 ()



- A. $abc < 0$
 B. $a = b + 1$
 C. $-1 < a < 0$
 D. $0 < a + b + c < 2$

探究点三 二次函数的最值

例 3 已知函数 $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$.

(1)若 $a=2$,求函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,2)$ 上的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上有最小值 3, 求 a 的值.

◆◆ 总结反思

(1)影响二次函数在闭区间上的最大值与最小值的要素是图象的开口方向、对称轴位置、闭区间.

(2)常结合二次函数在给定区间上的单调性或图象求解最大值与最小值,通常在区间的端点或二次函数图象的顶点处取得最值.

(3) 当开口方向或对称轴位置或区间不确定时要分情况讨论.

变式题 已知函数 $f(x)=x^2-2ax-3$.

- (1)若 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增,求 a 的取值范围;
(2)求 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值.

/ 第 2 课时 一元二次方程、不等式 /

- 【课标要求】**
1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
 2. 了解一元二次不等式的现实意义.能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
 3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

一般地,形如 $ax^2+bx+c>0$ 的不等式称为一元二次不等式,其中 a,b,c 是常数,而且 $a\neq 0$.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的根	有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ($x_1<x_2$)	有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$) 的解集			
$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$) 的解集			

3. 分式不等式

(1) $\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$;

$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

(2) $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\geq 0, \\ g(x)\neq 0; \end{cases}$

$\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\leq 0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

◆◆ 常用结论

1. 绝对值不等式 $|x|>a$ ($a>0$) 的解集为 $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$, 绝对值不等式 $|x|<a$ ($a>0$) 的解集为 $(-a, a)$.
2. (1)对于不等式 $ax^2+bx+c>0$, 求解时不要忘记讨论 $a=0$ 时的情形;
(2)注意区分 $\Delta<0$ 时, $ax^2+bx+c>0$ ($a\neq 0$) 的解集为 $\mathbf{R}$ 还是 $\varnothing$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 不等式 $13-4x^2>0$ 的解集为 _____.

2. [教材改编] 若不等式 $x^2 + ax + b > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, 则 $a + b =$ _____.
3. [教材改编] 若一元二次不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则实数 k 的取值范围是 _____.

题组二 常错题

- ◆ 索引: 忽视二次项系数的符号致误; 变形不等价致误; 分类讨论时忽视二次项系数为 0 的情况致误.
4. 不等式 $-2x^2 + x \leq -3$ 的解集为 _____.
5. 不等式 $\frac{2}{x+1} \leq 1$ 的解集是 _____.
6. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 有实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

课堂考点探究

探究点一 一元二次不等式的求解

► 角度 1 不含参的不等式

例 1 (多选题) 下列说法中正确的是 ()

- A. 不等式 $x^2 + x - 2 > 0$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$
- B. 不等式 $\frac{2x+1}{x-2} \leq 1$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x < 2\}$
- C. 不等式 $|x-2| \geq 1$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$
- D. 不等式 $0 < x^2 - x - 2 \leq 4$ 的解集为 $[-2, -1) \cup (2, 3]$

◆◆ 总结反思

解一元二次不等式的一般步骤是: ①化为标准形式 ($a > 0$); ②确定判别式 Δ 的符号, 若 $\Delta \geq 0$, 则求出该不等式对应的一元二次方程的根, 若 $\Delta < 0$, 则对应的一元二次方程无根; ③结合二次函数的图象得出不等式的解集. 特别地, 若一元二次不等式的左边能因式分解, 则可直接写出不等式的解集.

► 角度 2 含参的不等式

例 2 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+2)x + 2 < 0$ ($a \in \mathbf{R}$).

◆◆ 总结反思

对含参的不等式, 应对参数进行分类讨论, 常见的分类有:

- (1) 根据二次项系数为正、负及零进行分类;
- (2) 根据判别式 Δ 与 0 的关系判断对应一元二次方程根的个数;
- (3) 对应的一元二次方程有两个根时, 有时还需根据两根的大小进行讨论.

变式题 解关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + 1 > 0, a \in \mathbf{R}$.

► 角度 3 二次复合含参不等式

例 3 已知函数 $f(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1$, 求关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集.

◆◆ 总结反思

对于复合指数(对数)不等式,可通过换元法,转化为一元二次不等式后求解.需要注意的是换元前后对未知数取值范围的影响.

探究点二 三个二次之间的关系

例 4 (多选题)已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$, 则

()

- A. $a>0$
B. $a+b+c>0$
C. 不等式 $bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<-6\}$
D. 不等式 $cx^2-bx+a<0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2}, +\infty)$

◆◆ 总结反思

- 一元二次方程的根就是相应一元二次函数的零点,也是相应一元二次不等式解集的端点值.
- 给出一元二次不等式的解集,相当于知道了相应二次函数的开口方向及与 x 轴的交点,可以利用代入根或根与系数的关系求待定系数.

变式题 (多选题)已知关于 x 的不等式 $a(x-2)(x+1)+1>0$ 的解集是 (x_1, x_2) , 其中 $x_1<x_2$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $x_1+x_2=1$ B. $x_1x_2+2<0$
C. $x_1<-1<x_2<2$ D. $|x_1-x_2|>3$

探究点三 一元二次不等式恒成立问题

例 5 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2$.

- 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x)\geq a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- 当 $x\in[-1,1]$ 时, $f(x)\geq a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- 当 $a\in[2,3]$ 时, $f(x)\geq 0$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

◆◆ 总结反思

不等式恒成立求参数的取值范围的解题策略

(1)一元二次不等式恒成立,可以利用判别式.

(2)求不等式恒成立问题的常见方法:①分离参数: $a\geq f(x)$ 恒成立($a\geq f(x)_{\max}$ 即可)或 $a\leq f(x)$ 恒成立($a\leq f(x)_{\min}$ 即可);②数形结合: $y=f(x)$ 的图象在 $y=g(x)$ 的图象的上方即可;③讨论最值: $f(x)_{\min}\geq 0$ 或 $f(x)_{\max}\leq 0$ 恒成立;④讨论参数.

(3)弄清自变量、取值范围,一般情况下,求谁的取值范围,谁就是参数.

变式题 (1)若关于 x 的不等式 $x^2-2ax-3<0$ 对任意 $x\in[0,2]$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{4})$ B. $(-\frac{1}{4}, 0)$
C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

(2)若不等式 $x^2-ax\geq 16-3x-4a$ 对任意 $a\in[-2,4]$ 恒成立,则 x 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -8]\cup[3, +\infty)$
B. $(-\infty, 0)\cup[1, +\infty)$
C. $[-8, 6]$
D. $(0, 3]$

(3)已知函数 $f(x)=x^2+2x$, 若 $f(x)\geq m^2-2am-9$ 对任意 $x\in[-1,1], a\in[-1,1]$ 恒成立,则实数 m 的取值范围为_____.